Vierbein-Formulierung der Theorie des Schwerefeldes

K. L. Chao und M. Kohler

Institut für Theoretische Physik der Technischen Hochschule Braunschweig

(Z. Naturforschg. **20 a**, 753—755 [1965]; eingegangen am 26. März 1965)

Bei den Darstellungen des Ricci-Tensors durch die Vierbeine wird ein asymmetrischer Tensor zweiter Stufe definiert. Sein symmetrischer Anteil ist der Ricci-Tensor und sein antisymmetrischer Anteil ist der Møllersche Tensor. Für das Schwerefeld im Vakuum wird der asymmetrische Tensor gleich Null angesetzt. Diese Formulierung ist äquivalent mit der Vierbein-Theorie von Møller. Die Møllerschen Bedingungen für ein orthogonales System werden untersucht.

Die allgemeine Relativitätstheorie Einsteins lehrt uns, daß es schwierig ist, über die Lokalisierung von Energie und Impuls im Schwerefeld zu sprechen. Denn nach dem von Einstein gegebenen Energie-Impuls-Komplex ist die Energie nicht lokalisierbar. Im Rahmen einer auf den klassischen Vorstellungen beruhenden Theorie ist dieses Verhalten überraschend. Es hat sich herausgestellt, daß wohl kein Energie-Impuls-Komplex existiert, der nur eine Funktion der Metrik und deren Ableitungen ist und gewisse Forderungen einschließlich der Lokalisierbarkeit erfüllt [1].

Um eine befriedigende Lösung des Problems der Energie zu erhalten, ist es notwendig, einen neuen Weg zu finden, zum Beispiel, an Stelle der Metrik des Raum-Zeit-Kontinuums eine andere invariante Größe als die wahre fundamentale Variable des Gravitationsfeldes zu wählen. Eine Formulierung der Erhaltungssätze wurde von Kohler [2] angegeben, indem er außer der Metrik des Riemannschen Raums noch eine zweite Metrik in jedem Weltpunkt eingeführt hat. Die Differenz zwischen den beiden Metriken beschreibt das eigentliche Gravitationsfeld. Eine andere Möglichkeit bietet die Møllersche Vierbein-Formulierung der allgemeinen Relativitätstheorie [1]. Wie er gezeigt hat, kann man mit Hilfe der Vierbeine einen Energie-Impuls-Komplex aufstellen, der alle Forderungen einschließlich der Lokalisierbarkeit erfüllt. Außerdem wissen wir, daß der Einfluß des Gravitationsfeldes auf die Fermionen nur durch die Vierbeine, nicht durch die Metrik darstellbar ist [3]. Diese Tatsache stützt auch die Annahme, die Vierbeine als die Feldvariablen der Gravitation zu wählen.

Wenn man in jedem Punkt der Riemannschen Mannigfaltigkeit vier orthonormierte Vektoren $h_{\alpha a}$ einführt, dann bilden die Vierbeine ein lokales System, in dem die spezielle Relativitätstheorie Gültigkeit hat. Bekanntlich gelten

$$h_{\alpha a}\, h_{\beta}{}^{a} = g_{\alpha\beta}\,, \tag{1}$$

$$h^{\sigma a}\, h_{\sigma}{}^{b} = \eta^{ab}\,, \tag{2}$$

$$h^{\sigma a}\, h_{\sigma b} = \delta^{a}_{b}\,, \tag{3}$$

$$h^{\alpha a}\, h_{\beta a} = \delta^{\alpha}_{\beta}\,. \tag{4}$$

Hierbei bezeichnen wir die Komponenten mit den griechischen Indizes und die Beine mit den lateinischen Indizes. Die zu dem lokalen System gehörige Metrik ist η^{ab}. Die Vierbeine haben insgesamt 16 Komponenten. Will man die Vierbeine bestimmen, so braucht man 16 Gleichungen. Møller hat bei seiner Arbeit außer den Einsteinschen Gleichungen noch 6 Bedingungen vorgeschlagen. Diese 6 Bedingungen lauten:

$$\xi_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta}{}^{\lambda}{}_{;\lambda} - \gamma_{\sigma}{}^{\lambda}{}_{\lambda}\, \gamma_{\alpha\beta}{}^{\sigma} = 0\,, \tag{5}$$

wobei der Tensor $\gamma_{\alpha\beta\lambda}$ folgendermaßen definiert ist:

$$\gamma_{\alpha\beta\lambda} = h_{\alpha}{}^{a}\, h_{\beta a;\lambda}\,. \tag{6}$$

Das Semikolon vor dem Index λ bedeutet die kovariante Ableitung mit Hilfe der Christoffelschen Symbole.

In dieser Arbeit wollen wir uns mit den Darstellungen des Ricci-Tensors $R_{\alpha\beta}$ durch die Vierbeine und mit den Feldgleichungen im Vakuum beschäftigen. Im Abschnitt I definieren wir einen Tensor $K_{\alpha\beta}$, der unsymmetrisch ist gegenüber den beiden Indizes α und β. Der Tensor $K_{\alpha\beta}$ besitzt im 4-dimen-

[1] C. Møller, Kgl. Danske Videnskab. Selskab, Mat. Fys. Skrifter **1**, no. 10 [1961]; Kgl. Danske Videnskab. Selskab, Mat. Fys. Medd. **34**, no. 3 [1964].

[2] M. Kohler, Z. Phys. **131**, 571 [1952]; **134**, 286 [1953].

[3] P. A. M. Dirac, Max-Planck-Festschrift, Berlin 1958, S. 339. — K. L. Chao, Dissertation, Braunschweig 1962.

sionalen Raum 16 Komponenten. Der symmetrische Anteil des Tensors $K_{\alpha\beta}$ ist der RICCI-Tensor $R_{\alpha\beta}$. Im Abschnitt II setzen wir $K_{\alpha\beta}=0$ als die Feldgleichungen der Vierbeine im Vakuum. Es stellt sich heraus, daß diese Annahme mit der MØLLERschen Theorie völlig äquivalent ist, denn der antisymmetrische Anteil des Tensors $K_{\alpha\beta}$ ist genau der MØLLERsche Tensor $\xi_{\alpha\beta}$. Zum Schluß untersuchen wir die Eigenschaften der Metrik eines orthogonalen Systems unter den MØLLERschen Bedingungen.

I. Darstellungen des Ricci-Tensors

Außer dem Tensor $\gamma_{\alpha\beta\lambda}$ kann man noch folgenden Tensor dritter Stufe definieren:

$$\Lambda_{\alpha\beta\lambda}=\tfrac{1}{2}\,h_\alpha{}^a(h_{\beta a,\lambda}-h_{\lambda a,\beta})\,. \tag{7}$$

Der Tensor $\gamma_{\alpha\beta\lambda}$ ist antisymmetrisch gegenüber den beiden vorderen Indizes α und β. Der Tensor $\Lambda_{\alpha\beta\lambda}$ ist dagegen antisymmetrisch bezüglich der beiden hinteren Indizes β und λ. Daher kann man in (7) statt der gewöhnlichen Ableitungen, die mit einem Komma bezeichnet werden, kovariante Ableitungen schreiben:

$$\Lambda_{\alpha\beta\lambda}=\tfrac{1}{2}\,h_\alpha{}^a(h_{\beta a;\lambda}-h_{\lambda a;\beta})=\tfrac{1}{2}\,(\gamma_{\alpha\beta\lambda}-\gamma_{\alpha\lambda\beta})\,. \tag{8}$$

Außerdem kann man auch den Tensor $\gamma_{\alpha\beta\lambda}$ durch den Tensor $\Lambda_{\alpha\beta\lambda}$ ausdrücken:

$$\gamma_{\alpha\beta\lambda}=\Lambda_{\alpha\beta\lambda}+\Lambda_{\beta\lambda\alpha}+\Lambda_{\lambda\beta\alpha}\,. \tag{9}$$

Für eine Darstellung des RICCI-Tensors $R_{\alpha\beta}$ durch die Vierbeine zeigt uns die RICCIsche Identität eine Möglichkeit.

$$h_{\alpha a;\beta\lambda}-h_{\alpha a;\lambda\beta}=R^\sigma{}_{\alpha\beta\lambda}\,h_{\sigma a}\,. \tag{10}$$

Multiplizieren wir (10) mit $h^{\lambda a}$ und summieren über a und λ, dann folgt

$$\begin{aligned}R_{\alpha\beta}&=h^{\lambda a}\,h_{\alpha a;\beta\lambda}-h^{\lambda a}\,h_{\alpha a;\lambda\beta}\\&=(h^{\lambda a}\,h_{\alpha a;\beta})_{;\lambda}-(h^{\lambda a}\,h_{\alpha a;\lambda})_{;\beta}\\&\quad+h_{\alpha a;\lambda}\,h^{\lambda a}{}_{;\beta}-h^{\lambda a}{}_{;\lambda}\,h_{\alpha a;\beta}\\&=\gamma^\lambda{}_{\alpha\beta;\lambda}+\gamma_\alpha{}^\lambda{}_{\lambda;\beta}-\gamma_\alpha{}^{\sigma\lambda}\,\gamma_{\sigma\lambda\beta}-\gamma_\sigma{}^\lambda{}_\lambda\,\gamma^\sigma{}_{\alpha\beta}\,.\end{aligned} \tag{11}$$

Dabei haben wir von (6) und (2) Gebrauch gemacht. Diese Darstellung läßt sich auch mit dem Tensor $\Lambda_{\alpha\beta\lambda}$ ausdrücken, indem man einfach die Beziehung (9) in (11) einsetzt.

$$\begin{aligned}R_{\alpha\beta}=&\,(\Lambda^\lambda{}_{\alpha\beta}+\Lambda_{\alpha\beta}{}^\lambda+\Lambda_{\beta\alpha}{}^\lambda)_{;\lambda}+2\,\Lambda^\lambda{}_{\lambda\alpha;\beta}+\Lambda_\alpha{}^{\lambda\sigma}\,\Lambda_{\beta\lambda\sigma}\\&-2\,\Lambda_\alpha{}^{\lambda\sigma}\,\Lambda_{\lambda\sigma\beta}-2\,\Lambda^\lambda{}_{\lambda\sigma}(\Lambda^\sigma{}_{\alpha\beta}+\Lambda_{\alpha\beta}{}^\sigma+\Lambda_{\beta\alpha}{}^\sigma)\,.\end{aligned} \tag{12}$$

Weil $R_{\alpha\beta}$ ein symmetrischer Tensor ist, bekommt man eine äquivalente Darstellung, indem man in (12) α und β miteinander vertauscht:

$$\begin{aligned}R_{\alpha\beta}=&\,(\Lambda^\lambda{}_{\beta\alpha}+\Lambda_{\beta\alpha}{}^\lambda+\Lambda_{\alpha\beta}{}^\lambda)_{;\lambda}+2\,\Lambda^\lambda{}_{\lambda\beta;\alpha}+\Lambda_\alpha{}^{\lambda\sigma}\,\Lambda_{\beta\lambda\sigma}\\&-2\,\Lambda_\beta{}^{\lambda\sigma}\,\Lambda_{\lambda\sigma\alpha}-2\,\Lambda^\lambda{}_{\lambda\sigma}\,(\Lambda^\sigma{}_{\beta\alpha}+\Lambda_{\beta\alpha}{}^\sigma+\Lambda_{\alpha\beta}{}^\sigma)\,.\end{aligned} \tag{13}$$

Es ist zweckmäßig, das arithmetische Mittel von (12) und (13) als die Darstellung des RICCI-Tensors zu nehmen:

$$\begin{aligned}R_{\alpha\beta}=&\,\Lambda_{\alpha\beta}{}^\lambda{}_{;\lambda}+\Lambda_{\beta\alpha}{}^\lambda{}_{;\lambda}+\Lambda^\lambda{}_{\lambda\alpha;\beta}+\Lambda^\lambda{}_{\lambda\beta;\alpha}+\Lambda_\alpha{}^{\lambda\sigma}\,\Lambda_{\beta\lambda\sigma}\\&-\Lambda_\alpha{}^{\lambda\sigma}\,\Lambda_{\lambda\sigma\beta}-\Lambda_\beta{}^{\lambda\sigma}\,\Lambda_{\lambda\sigma\alpha}\\&-2\,\Lambda^\lambda{}_{\lambda\sigma}\,\Lambda_{\alpha\beta}{}^\sigma-2\,\Lambda^\lambda{}_{\lambda\sigma}\,\Lambda_{\beta\alpha}{}^\sigma.\end{aligned} \tag{14}$$

Die Darstellung (14) hat gegenüber (12) und (13) den Vorteil, daß man an der rechten Seite unmittelbar die Symmetrie-Eigenschaft von $R_{\alpha\beta}$ ablesen kann.

Man erkennt leicht, daß (14) die folgende Form hat:

$$R_{\alpha\beta}=\tfrac{1}{2}(K_{\alpha\beta}+K_{\beta\alpha})\,, \tag{15}$$

wobei wir den Tensor $K_{\alpha\beta}$ definieren durch

$$\begin{aligned}K_{\alpha\beta}=&\,2\,\Lambda_{\alpha\beta}{}^\lambda{}_{;\lambda}+2\,\Lambda^\lambda{}_{\lambda\alpha;\beta}+\Lambda_\alpha{}^{\lambda\sigma}\,\Lambda_{\beta\lambda\sigma}-2\,\Lambda_\alpha{}^{\lambda\sigma}\,\Lambda_{\lambda\sigma\beta}\\&-4\,\Lambda^\lambda{}_{\lambda\sigma}\,\Lambda_{\alpha\beta}{}^\sigma.\end{aligned} \tag{16}$$

Der antisymmetrische Anteil von $K_{\alpha\beta}$ lautet

$$M_{\alpha\beta}=\tfrac{1}{2}(K_{\alpha\beta}-K_{\beta\alpha}) \tag{17}$$

$$\begin{aligned}=&\,\Lambda_{\alpha\beta}{}^\lambda{}_{;\lambda}-\Lambda_{\beta\alpha}{}^\lambda{}_{;\lambda}+\Lambda^\lambda{}_{\lambda\alpha;\beta}-\Lambda^\lambda{}_{\lambda\beta;\alpha}-\Lambda_\alpha{}^{\lambda\sigma}\,\Lambda_{\lambda\sigma\beta}\\&+\Lambda_\beta{}^{\lambda\sigma}\,\Lambda_{\lambda\alpha\sigma}-2\,\Lambda^\lambda{}_{\lambda\sigma}\,\Lambda_{\alpha\beta}{}^\sigma+2\,\Lambda^\lambda{}_{\lambda\sigma}\,\Lambda_{\beta\alpha}{}^\sigma\,.\end{aligned} \tag{18}$$

Der Tensor $K_{\alpha\beta}$ ist nicht ausdrückbar durch die Metrik $g_{\alpha\beta}$. Daher ist $K_{\alpha\beta}$ nur gegenüber den Rotationen der Vierbeine mit konstanten Koeffizienten invariant. Genauso verhält sich der antisymmetrische Tensor $M_{\alpha\beta}$.

II. Feldgleichungen für die Vierbeine

Wenn wir die Vierbeine $h_{\alpha a}$ als die fundamentalen Variablen des Gravitationsfeldes betrachten und sie bestimmen wollen, brauchen wir 16 Gleichungen. Da der Tensor $K_{\alpha\beta}$ im 4-dimensionalen Raum 16 Komponenten hat, nehmen wir

$$K_{\alpha\beta}=0 \tag{19}$$

als die Gleichungen für das Gravitationsfeld im Vakuum an. Wenn sämtliche Komponenten von $K_{\alpha\beta}$ verschwinden, folgt aus (15)

$$R_{\alpha\beta}=0\,. \tag{20}$$

Dieses sind die EINSTEINschen Gleichungen im Vakuum. Das heißt, die Annahme (19) hat die EINSTEINschen Gleichungen nicht geändert, aber sie stellt eine Einschränkung der Lösungen der EINSTEINschen Gleichungen dar. Jede Lösung von (19) ist auch die Lösung von (20). Umgekehrt geht es nicht. Für den Fall eines orthogonalen Systems können wir eine allgemeine Aussage formulieren. Wir erörtern es im Abschnitt III.

Verschwinden die Komponenten von $K_{\alpha\beta}$, so ist der Tensor $M_{\alpha\beta}$ nach (17) auch gleich Null. Daher sind die Gln. (19) völlig äquivalent mit den EINSTEINschen Gln. (20) plus 6 Bedingungen

$$M_{\alpha\beta}=0\,. \tag{21}$$

Dies ist nichts anderes als die Theorie von MØLLER. Um dieses zu sehen, brauchen wir außer (9) noch folgende Identität: Die Differenz zwischen den beiden Darstellungen (12) und (13) muß identisch verschwinden, also

$$\begin{aligned}\Lambda^{\lambda}{}_{\alpha\beta;\lambda}+\Lambda^{\lambda}{}_{\lambda\alpha;\beta}-\Lambda^{\lambda}{}_{\lambda\beta;\alpha}-\Lambda_{\alpha}{}^{\lambda\sigma}\,\Lambda_{\lambda\sigma\beta}\\ +\Lambda_{\beta}{}^{\lambda\sigma}\,\Lambda_{\lambda\sigma\alpha}-2\,\Lambda^{\lambda}{}_{\lambda\sigma}\,\Lambda^{\sigma}{}_{\alpha\beta}=0\,.\end{aligned} \tag{22}$$

Mit Hilfe von (22) nimmt (18) folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned}M_{\alpha\beta}=(\Lambda_{\alpha\beta}{}^{\lambda}-\Lambda_{\beta\alpha}{}^{\lambda}-\Lambda^{\lambda}{}_{\alpha\beta})_{;\lambda}\\ -2\,\Lambda^{\lambda}{}_{\lambda\sigma}(\Lambda_{\alpha\beta}{}^{\sigma}-\Lambda_{\beta\alpha}{}^{\sigma}-\Lambda^{\sigma}{}_{\alpha\beta})\,.\end{aligned} \tag{23}$$

Unter Berücksichtigung von (9) ergibt sich

$$M_{\alpha\beta}=\gamma_{\alpha\beta}{}^{\lambda}{}_{;\lambda}-\gamma_{\sigma}{}^{\lambda}{}_{\lambda}\,\gamma_{\alpha\beta}{}^{\sigma}=\xi_{\alpha\beta}\,. \tag{24}$$

Dies ist der MØLLERsche Tensor. MØLLER hat seine 6 Bedingungen (5) durch geometrische Überlegungen und durch Versuch für das schwache Gravitationsfeld festgelegt, während hier der Tensor $M_{\alpha\beta}$ aus der Definition des Tensors $K_{\alpha\beta}$ zwanglos folgt.

III. Orthogonales System

Bei vorgegebenen Vierbeinen kann man die Metrik eindeutig bestimmen. Umgekehrt bei vorgegebener Metrik existieren unendlich viele Vierbeine, die die Beziehung (1) erfüllen. In der MØLLERschen Theorie kommen nur jene Vierbeine in Frage, die den Bedingungen (5) gehorchen. Diese sollen nun für eine Metrik formuliert werden, in der ein orthogonales Koordinatensystem existiert. Für ein solches System gilt:

$$\begin{aligned}&g_{\alpha\alpha}=e_{(\alpha)}\,H_{\alpha}^{2}\,, &&g_{\alpha\beta}=0\,;\\ &g^{\alpha\alpha}=1/g_{\alpha\alpha}\,, &&g^{\alpha\beta}=0\,, \quad \alpha\neq\beta\,.\end{aligned} \tag{25}$$

Man wählt gewöhnlich die „natürlichen" Vierbeine:

$$\begin{aligned}&h_{\alpha(\alpha)}=e_{(\alpha)}\,H_{\alpha}\,, &&h_{\alpha(\beta)}=0\,;\\ &h^{\alpha}{}_{(\alpha)}=1/H_{\alpha}\,, &&h^{\alpha}{}_{(\beta)}=0\,, \quad \alpha\neq\beta\,.\end{aligned} \tag{26}$$

Hier bezeichnen wir die Beine durch die griechischen Indizes in Klammer und $e_{(0)}=1$, $e_{(1)}=e_{(2)}=e_{(3)}=-1$.

Um die Formel (5) auszuwerten, brauchen wir die CHRISTOFFELschen Symbole für (25):

$$\Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta}=-\frac{1}{2\,g_{\alpha\alpha}}\frac{\partial g_{\beta\beta}}{\partial x^{\alpha}}\,,\quad \Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\frac{\partial\log g_{\beta\beta}}{\partial x^{\alpha}}\,,$$
$$\Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha}=\frac{1}{2}\frac{\partial\log g_{\alpha\alpha}}{\partial x^{\alpha}}\,. \tag{27}$$

Die nicht-verschwindenden Komponenten von $\gamma_{\alpha\beta\lambda}$ sind:

$$\gamma_{\alpha\beta\beta}=e_{(\beta)}\,H_{\beta}\frac{\partial H_{\beta}}{\partial x^{\alpha}}\,. \tag{28}$$

Daraus folgt

$$\xi_{\alpha\beta}=-\frac{1}{2}\frac{\partial^{2}}{\partial x^{\alpha}\,\partial x^{\beta}}\log\frac{H_{\alpha}^{2}}{H_{\beta}^{2}}=0\,. \tag{29}$$

Aus diesem Ergebnis erkennt man, daß die SCHWARZSCHILDsche Metrik sowie viele andere Lösungen der EINSTEINschen Gleichungen die MØLLERschen Bedingungen erfüllen und daher auch Lösungen von (19) sind.

Die Formel (29) erinnert uns an eine der Bedingungen der separierbaren Koordinatensysteme von STÄCKEL [4].

[4] L. P. EISENHART, Ann. Math. **35**, 284 [1934].